Bahan Kuliah Statistik 2

ANALISIS VARIANS

Toto Sugiharto

Fakultas Ekonomi
Universitas Gunadarma
2009

Analisis Varians Satu-Arah (*One-Way Analysis of Variance—ANOVA*)

Prosedur analisis varians (*Analysis of Variance—ANOVA*) menggunakan variabel numerik tunggal (*single numerical variable*) yang diukur dari sejumlah sampel untuk menguji hipotesis nol dari populasi yang (diperkirakan) memiliki rata-rata hitung (*mean*) sama. Variabel dimaksud harus berupa variabel kuantitatif. Variabel ini terkadang dinamakan sebagai variabel terikat (*dependent variable*).

Hipotesis nol (H_0) dalam uji ANOVA adalah bahwa semua (minimal 3) populasi yang sedang dikaji memiliki rata-rata hitung (*mean*) sama. Ringkasnya, hipotesis nol (H_0) dan hipotesis alternatif (H_1) dalam ANOVA adalah:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n$

H_1 : Tidak semua populasi memiliki rata-rata hitung (*mean*) sama.

Analisis varians (*Analysis of Variance—ANOVA*) adalah prosedur statistika untuk mengkaji (mendeterminasi) apakah rata-rata hitung (*mean*) dari 3 (tiga) populasi atau lebih, sama atau tidak.

Dalam uji ANOVA, bukti sampel diambil dari setiap populasi yang sedang dikaji. Data-data yang diperoleh dari sampel tersebut digunakan untuk menghitung statistik sampel. Distribusi sampling yang digunakan untuk mengambil keputusan statistik, yakni menolak atau menerima hipotesis nol (H_0), adalah DISTRIBUSI F (*F Distribution*).

Dalam uji ini diasumsikan bahwa semua populasi yang sedang dikaji memiliki keragaman atau varians (*variance*) sama tanpa mempertimbangkan apakah populasi-populasi tersebut memiliki rata-rata hitung (*mean*) sama atau berbeda. Ada 2 (dua) cara atau metode dalam mengestimasi nilai varians ini, yakni metode dalam kelompok (*within method*) dan metode antar-kelompok (*between method*). Metode dalam kelompok menghasilkan estimasi tentang varians yang sahih (*valid*) apakah hipotesis nol salah atau benar. Sementara metode antar-kelompok menghasilkan estimasi tentang varians yang sahih (*valid*) hanya jika hipotesis nol benar.

Metode dalam kelompok (*within method*) menghasilkan estimasi yang sahih (*valid*) apakah hipotesis nol benar atau tidak. Metode antar-kelompok (*between method*) menghasilkan estimate yang sahih (*valid*) jika hipotesis nol benar.

Langkah akhir dari uji ANOVA adalah menghitung rasio antara metode antar-kelompok (*between method*) sebagai numerator (faktor yang dibagi) dan metode dalam kelompok (*within method*) sebagai denominator (faktor pembagi). Jika hipotesis nol benar (diterima), rasio di atas berisikan dua hasil estimasi yang terpisah dari populasi yang memiliki varians sama dan, karenanya, berasal dari distribusi F. Namun demikian, jika rata-rata hitung (*mean*) populasi yang dikaji tidak sama, hasil estimasi dalam numerator akan mengembung sehingga rasionya akan menjadi sangat besar. Jelas bahwa rasio demikian, dengan membandingkannya dengan distribusi F, tidak berasal dari distribusi F, dan hipotesis nol akan ditolak. Uji hipotesis dalam ANOVA adalah uji hipotesis bersisi-satu (*one-tailed*) di mana nilai statistik F yang besar akan mengarah ke ditolaknya hipotesis nol, sementara nilai statistik F yang kecil akan mengarah ke penerimaan hipotesis nol.

Metode dalam Kelompok (*Within Method*)

Terlepas dari benar atau tidaknya hipotesis nol, metode dalam kelompok (*within method*) akan menghasilkan estimasi yang sahih (*valid*). Hal ini disebabkan oleh variabilitas sampel dideterminasi dengan jalan membandingkan setiap butir data dengan rata-rata hitung masing-masing. Nilai sampel yang diambil dari populasi A dibandingkan dengan rata-rata sampel A. Demikian pula dengan masing-masing populasi yang diobservasi. Persamaan (1) berikut digunakan untuk mengestimasi keragaman atau varians (*variance*) dalam metode dalam kelompok.

$$s_w^2 = \frac{\sum_j \sum_i (X_{ij} - \overline{X}_j)^2}{c(n - 1)} \qquad (1)$$

di mana:
s_w^2 : varians yang diestimasi menggunakan metode dalam kelompok;
X_{ij} : butir data ke-i dalam kelompok j;
$\overline{X}_j$: rata-rata (*mean*) kelompok j;
c : jumlah kelompok;
n : jumlah/ukuran sampel dalam setiap kelompok; dan
c(n-1) : derajat bebas (*degree of freedom*).

Tanda penjumlahan ganda ($\Sigma\Sigma$) berarti bahwa ada 2 (dua) langkah penjumlahan. Pertama menyelesaikan tanda jumlah sebelah kanan. Setelah itu, menyelesaikan tanda penjumlahan sebelah kiri.

<u>Contoh 1</u>:

Tabel 1. Data contoh 1

No.	Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3
1	1	5	9
2	2	7	12
3	3	9	15
Rata-rata	2	7	12

Langkah pertama menyelesaikan penjumlahan $\Sigma(Xi - \overline{X}_j)^2$ untuk setiap kelompok (j). Seperti berikut:

$$\Sigma(X_i - \overline{X}_1)^2 = (1 – 2)^2 + (2 – 2)^2 + (3 – 2)^2 = 2$$

$$\Sigma(X_i - \overline{X}_2)^2 = (5 – 7)^2 + (7 – 7)^2 + (9 – 7)^2 = 8$$

$$\Sigma(X_i - \overline{X}_3)^2 = (9 – 12)^2 + (12 – 12)^2 + (15 – 12)^2 = 18$$

Selanjutnya menyelesaikan penjumlahan $\Sigma\Sigma(X_{ij} - \overline{X}_j)^2$, seperti berikut:

$$\Sigma\Sigma(X_{ij} - \overline{X}_j)^2 = \Sigma(X_i - \overline{X}_1)^2 + \Sigma(X_i - \overline{X}_2)^2 + \Sigma(X_i - \overline{X}_3)^2$$

$$= 2 + 8 + 18 = 28$$

Setelah itu baru kita bisa menyelesaikan keseluruhan persamaan (1), seperti berikut.

$$s_w^2 = \frac{28}{3(3 - 1)} = \frac{28}{6} = 4,67$$

<u>Metode Antar-kelompok (*Between Method*)</u>

Metode penghitungan varians yang kedua adalah metode antar-kelompok (*between method*). Metode menghasilkan estimasi varians yang sahih jika hipotesis nol benar. Persamaan yang digunakan dalam meode ini adalah sebagai berikut:

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_j (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2}{c - 1} \qquad (2)$$

di mana:
$s_{\bar{X}}^2$: varians yang diestimasi menggunakan metode antar-kelompok;
$\bar{X}_j$: rata-rata (*mean*) kelompok j;
$\bar{\bar{X}}$: rata-rata keseluruhan (*grand mean*) yang digunakan sebagai μ estimasi;
dan
c : jumlah kelompok.

Varians dalam metode ini bisa juga dihitung dengan menggunakan persamaan (3) berikut:

$$s_b^2 = \frac{n\sum_j (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2}{c - 1} \qquad (3)$$

di mana:
s_b^2 : varians umum yang diestimasi menggunakan metode antar-kelompok;
$\bar{X}_j$: rata-rata (*mean*) kelompok j;
$\bar{\bar{X}}$: rata-rata keseluruhan (*grand mean*) yang digunakan sebagai μ estimasi;
c : jumlah kelompok;
n : jumlah/ukuran sampel masing-masing kelompok; dan
(c-1) : derajat bebas (*degree of freedom*).

Perlu dicatat bahwa untuk persamaan (3), jumlah/ukuran sampel (n) untuk setiap kelompok diasumsikan sama.

<u>Contoh 2</u>:

$$s_b^2 = \frac{n\sum_j (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2}{c - 1} = \frac{4\,[(12.0 - 11.4)^2 + (11.0 - 11.4)^2 + (11.2 - 11.4)^2]}{3 - 1}$$

$$= \frac{4(0.56)}{2} = \frac{2.24}{2} = 1,12$$

Tabel 2. Data contoh 2

No.	Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3
1	12.4	11.9	10.3
2	13.7	9.3	12.4
3	11.5	12.1	11.9
4	10.3	10.6	10.2
Rata-rata (*Mean*)	12.0	11.0	11.2
Rata-rata Keseluruhan (*Grand mean*)			11.4

Uji dan Tabel F Analisis Varians (*Analysis of Variance—ANOVA F Test and Table*)

Setelah menghitung nilai varians yang sebelumnya tidak diketahui dengan menggunakan metode dalam kelompok (*within method*) dan metode antar-kelompok (*between method*), selanjutnya kita membuat perbandingan atau rasio (*ratio*) antara kedua nilai varians tersebut.

$$F = \frac{s_b^2 \text{ (estimasi } \sigma^2 \text{ dengan metode antara)}}{s_w^2 \text{(estimasi } \sigma^2 \text{ menggunakan metode dalam)}} \qquad (4)$$

Jika hipotesis nol benar, numerator (pembilang) dan denumerator (penyebut) dalam persamaan (1.5) di atas akan merupakan estimasi yang sahih (*valid*) bagi varians dari populasi yang sedang dikaji. Rasio tersebut, dengan demikian, akan sesuai (*conform*) dengan distribusi F.

Hasil dari pengujian analisis varians biasanya disajikan dalam bentuk tabel yang biasa dinamakan TABEL ANOVA (*ANOVA TABLE*). Tabel ini terdiri atas kolom-kolom yang berisikan sumber keragaman atau sumber varians (*source of variance*), jumlah kuadrat (*sums of squares*—SS), derajat bebas analisis (*degree of freedom*), nilai keragaman atau varians yang diestimasi (*estimates of the variance*), dan nilai F untuk prosedur analisis keragaman/varians (*F value for the analysis of variance procedure*), sebagaimana tampak pada dalam Tabel 3 pada halaman berikut.

Tabel 3. Tabel Analisis Varians (*ANOVA Table*)

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat	Derajat bebas	σ^2 estimasi	Rasio F
Antar-kelompok *(between group)*	$N\sum_j (\overline{X}_j - \overline{\overline{X}})^2$	c - 1	JK_b/db_b	s_b^2/s_w^2
Dalam-kelompok (*within group*)	$\sum_j \sum_i (X_{ij} - \overline{X}_j)^2$	c(n – 1)	JK_w/db_w	
Jumlah	$\sum_j \sum_i (X_{ij} - \overline{\overline{X}})^2$	nc - 1		

Contoh 3:

Seorang analis dari toko perkulakan BKM ingin mengetahui apakah ketiga cabang tokonya yang tersebar di wilayah Kota Madya Depok memiliki rata-rata pendapatan per transaksi penjualan yang sama. Enam (6) transaksi penjualan dari masing-masing cabang dipilih secara acak sebagai sampel. Data tersebut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4: Pendapatan (ribu rupiah) per Transaksi Penjualan di Tiga Cabang Toko BKM

Transaksi	Toko 1	Toko 2	Toko 3
1	12,05	15,17	9,48
2	23,94	18,52	6,92
3	14,63	19,57	10,47
4	25,78	21,40	7,63
5	17,52	13,59	11,90
6	18,45	20,57	5,92
Jumlah	112,37	108,82	52,32
Rata-rata (*Mean*)	18,73	18,14	8,72
Rata-rata Keseluruhan (*Grand Mean*)			15,20

Jumlah sampel untuk masing-masing cabang (n) adalah 6, sedangkan jumlah cabang yang diteliti (c = columns) adalah 3.

Hipotesis nol untuk penelitian ini adalah bahwa semua cabang toko BKM memiliki rata-rata pendapatan per transaksi penjualan sama. Hipotesis alternatifnya adalah kebalikan dari hipotesis nol, yakni tidak semua cabang toko BKM memiliki rata-rata pendapatan per transaksi penjualan sama.

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1: Tidak semua cabang toko memiliki rata-rata pendapatan per transaksi penjualan sama.

Penghitungan jumlah kuadrat—JK_w (*Sum of squares--SS_w*) dengan menggunakan metode dalam-kelompok (*within method*) adalah:

Toko 1: $(12{,}05 – 18{,}73)^2 + (23{,}94 – 18{,}73)^2 + 14{,}63 – 18{,}73)^2 + (25{,}78 – 18{,}73)^2 + (17{,}52 – 18{,}73)^2 + (18{,}45 – 18{,}73)^2 = 139{,}82$

Toko 2: $(15{,}17 – 18{,}14)^2 + (18{,}52 – 18{,}14)^2 + (19{,}57 – 18{,}14)^2 + (21{,}40 – 18{,}14)^2 + (13{,}59 – 18{,}14)^2 + (20{,}57 – 18{,}14)^2 = 48{,}25$

Toko 3: $(9{,}48 – 8{,}72)^2 + (6{,}92 – 8{,}72)^2 + (10{,}47 – 8{,}72)^2 + (7{,}63 – 8{,}72)^2 + (11{,}90 – 8{,}72)^2 + (5{,}92 – 8{,}72)^2 = 26{,}02$

Jumlah Kuadrat—JK_w (*Sum of squares—SS_w*) $= 139{,}82 + 48{,}25 + 26{,}02$
$= \underline{214{,}09}$

Penghitungan jumlah kuadrat—JK_b (*Sum of squares—SS_b*) dengan metode antar-kelompok (*between method*) adalah sebagai berikut:

$(18{,}73 –15{,}2)^2 + (18{,}14 –15{,}2)^2 + (8{,}72 – 15{,}2)^2 = 63{,}09$

Jumlah kuadrat—JK_w (*Sum of squares—SS_w*) $= 6 \times 63{,}09 = \underline{378{,}54}$

Hasil penghitungan di atas kemudian disajikan dalam tabel anova pada halaman berikut.

F tabel pada derajat bebas numerator 2 dan derajat bebas denominator 15 (LIHAT TABEL DISTRIBUSI F) dengan tingkat signifikansi (α) 0,01 (1%) adalah <u>6,36</u>. Karena F-hitung (13,26) lebih besar daripada F-tabel (6,36), maka keputusan statistiknya adalah terdapat cukup bukti sampel untuk menolak H_0 dan menerima H_1. Artinya, tidak semua cabang Toko BKM memiliki rata-rata pendapatan per transaksi penjualan yang sama.

Tabel 5: Tabel Anova Penelitian pada Toko Perkulakan BKM

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat	Derajat bebas	σ^2 estimasi	Rasio F
Antar-kelompok *(between group)*	378,54	(3 – 1) = 2	378,52/2 = <u>189,27</u>	189,27/14,27 = <u>13,26</u>
Dalam-kelompok (*within group*)	214,09	3(6 – 1) = 15	214,09/15 = <u>14,27</u>	
Jumlah	592,63	(6x3) – 1 = 17		

Analisis Varians Dua-Arah (*Two-Way Analysis of Variance—ANOVA*)

Dalam analisis varians satu-arah, hanya ada 1 (satu) sumber keragaman (*source of variability*) dalam variabel terikat (*dependent variable*), yakni: kelompok dalam populasi yang sedang dikaji. Terkadang kita juga perlu untuk mengetahui atau mengidentifikasi adanya 2 (dua) faktor yang mungkin menyebabkan perbedaan dalam variabel terikat (*dependent variable*). Untuk tujuan tersebut dilakukan analisis varians dua-arah (*Two-way ANOVA*).

Dalam analisis varians dua-arah, kita harus mengukur setiap kombinasi dua faktor dari variabel terikat (*dependent variable*) yang sedang dikaji. Sebagai ilustrasi, kita lihat contoh berikut.

<u>Contoh 1</u>:

Seorang konsultan mesin dari perusahan penyalur atau DEALER kendaraan diminta untuk mengkaji apakah ada perbedaan rata-rata efisiensi pemakaian BBM (kilometer/liter) antara tiga merek mobil. Di samping itu, ia diminta juga untuk mengkaji apakah ada perbedaan rata-rata efisiensi pemakaian BBM yang disebabkan oleh kapasitas mesin. Dari hasil pengumpulan data yang dilakukan konsultas tersebut diperoleh data sebagai berikut.

Tabel 6. Efisiensi Pemakaian BBM dari Tiga Merek Mobil dengan Dua Kapasitas Mesin (kilometer/liter)

Kapasitas (ml)	Merek Mobil			Jumlah (Baris)
	A-1	A-2	A-3	
1300	10	11	11	32
1500	11	12	11	34
Jumlah (Kolom)	21	23	22	66

Langkah penyelesaian analisis varians dua-arah

1. Penentuan hipotesis nol (H_0) baik antar-kolom (antar-merek mobil) maupun antar-baris (antar-kapasitas mesin)

   Hipotesis nol-kolom ($H_{0\text{-kolom}}$): Rata-rata efisiensi pemakaian BBM ketiga merek mobil adalah sama

   Hipotesis nol-baris ($H_{0\text{-baris}}$): Rata-rata efisiensi pemakaian BBM kedua kapasitas mesin adalah sama.

2. Penentuan tingkat signifikansi (α)

   Tingkat signifikansi (α) yang dipilih adalah 0,05 (5%).

3. Penghitungan jumlah kuadrat antar-kolom (*between columns sum of squares*)

   Jumlah kuadrat antar-kolom atau antar-merek mobil dihitung dengan persamaan (5) berikut:

$$JK_k = \sum_{k=1}^{K} \frac{T_k^2}{n_k} - \frac{T^2}{N} \qquad (5)$$

   di mana:

   JK_k : jumlah kuadrat antar-kolom;
   K : kolom (column);
   n_k : jumlah data dalam masing-masing kolom;
   N : jumlah data keseluruhan;
   T_k^2 : kuadrat jumlah masing-masing kolom; dan
   T^2 : kuadrat jumlah keseluruhan.

   Jadi JK_k-nya adalah:

$$JK_b = \left\{\frac{21^2}{2} + \frac{23^2}{2} + \frac{22^2}{2}\right\} - \left\{\frac{66^2}{6}\right\} = (220{,}5 + 264{,}5 + 242) - (726)$$

$$= 727 - 726 = \underline{1{,}00}$$

4. <u>Penghitungan jumlah kuadrat antar-baris (*between rows sum of squares*)</u>

Jumlah kuadrat antar-baris atau antar-kapasitas mesin dihitung dengan persamaan (6) di bawah ini.

$$JK_b = \sum_{b=1}^{B} \frac{T_b^2}{n_b} - \frac{T^2}{N} \qquad (6)$$

di mana:

JK_b: jumlah kuadrat antar-baris;
B: baris (row);
n_b: jumlah data dalam masing-masing baris;
N: jumlah data keseluruhan;
T_b^2: kuadrat jumlah masing-masing baris; dan
T^2: kuadrat jumlah keseluruhan.

Jadi JK_b-nya adalah:

$$JK_b = \{\frac{32^2}{3} + \frac{34^2}{3}\} - \{\frac{66^2}{6}\} = (341{,}333 + 385{,}333) - (726)$$

$$= 726.67 - 726 = \underline{0{,}67}$$

5. <u>Penghitungan jumlah kuadrat keseluruhan—JK_t (*total sum of squares*)</u>

Jumlah kuadrat total dihitung dengan persamaan (7) berikut.

$$JK_t = \sum_{b=1}^{B} \sum_{k=1}^{K} X_{bk}^2 - \frac{T^2}{N} \qquad (7)$$

di mana:

JK_t : jumlah kuadrat keseluruhan (*total sum of squares*);
B: baris (row);
K: kolom (column);
X_{bk} : data dalam baris-*b* dan kolom-*k*;
N: jumlah data keseluruhan; dan
T^2: kuadrat jumlah keseluruhan.

Jadi JK_t-nya adalah:

$$JK_t = (10^2 + 11^2 + 11^2 + 12^2 + 11^2 + 11^2) - (\frac{66^2}{6})$$

$$= 728 - 726 = \underline{2{,}00}$$

6. <u>Penghitungan jumlah kuadrat kesalahan (galat atau *error*)</u>

   Jumlah kuadrat kesalahan atau galat (*error*)—JK_e dihitung dengan persamaan (8) berikut.

   $$JK_e = JK_t - (JK_k + JK_b) \tag{8}$$

   di mana:

   JK_e: jumlah kuadrat galat (*error sum of squares*);
   JK_t : jumlah kuadrat keseluruhan (*total sum of squares*);
   JK_k: jumlah kuadrat kolom (*columns sum of squares*); dan
   JK_b: jumlah kuadrat baris (*rows sum of squares*)

   Jadi JK_e-nya adalah:

   $JK_e = 2 - (1 + 0{,}67) = \underline{0{,}33}$

7. <u>Penghitungan derajat bebas (*degree of freedom*)</u>

   (a) Derajat bebas kolom (db_k)

   $$db_k = k - 1 \tag{9}$$

   di mana: *k* adalah jumlah kolom.

   Jadi, $db_k = 3 - 1 = \underline{2}$

   (b) Derajat bebas baris (db_b)

   $$db_b = b - 1 \tag{10}$$

   di mana: *b* adalah jumlah baris.

   Jadi $db_b = 2 - 1 = \underline{1}$

   (c) Derajat bebas gatal/*error* (db_e)

   $$db_e = (b - 1)(k - 1) \tag{11}$$

   di mana: *b* adalah jumlah baris dan *k* adalah jumlah kolom.

   Jadi $db_b = (2 - 1)(3-1) = (1) \times (2) = \underline{2}$

   (d) Derajat bebas keseluruhan (db_t)

   $$db_t = N - 1 \tag{12}$$

   di mana: *N* adalah keseluruhan data (*b* x *k*).

   Jadi $db_b = 6 - 1 = \underline{5}$

8. <u>Penghitungan kuadrat rata-rata (*mean of squares*)</u>

   (a) Kuadrat rata-rata kolom—KR_k (*Column Mean of squares—MS_c*)

   $$KR_k = \frac{JK_k}{db_k} \tag{13}$$

Jadi, $KR_k = \frac{1}{2} = \underline{0,50}$

(b) Kuadrat rata-rata baris—KR_b (*Row Mean of squares—MS_r*)

$$KR_b = \frac{JK_k}{db_k} \qquad (14)$$

Jadi, $KR_b = \frac{0.67}{1} = \underline{0,67}$

(c) Kuadrat rata-rata galat—KR_e (*Error Mean of squares—MS_e*)

$$KR_e = \frac{JK_e}{db_e} \qquad (15)$$

Jadi, $KR_k = \frac{0.33}{2} = \underline{0,17}$

9. Penghitungan Rasio F atau F-hitung

(a) F-hitung kolom ($F\text{-}h_k$)

$$F\text{-}h_k = \frac{KR_k}{KR_e} \qquad (16)$$

Jadi, $F\text{-}h_k = \frac{0.50}{0.17} = \underline{3,00}$

(b) F-hitung baris (F_{hb})

$$F\text{-}h_b = \frac{KR_b}{KR_e} \qquad (17)$$

Jadi, $F\text{-}h_b = \frac{0.67}{0.17} = \underline{4,00}$

10. Penentuan Ratio F kritik atau F-tabel

(a) F-tabel untuk kolom ($F\text{-}t_k$)

$F\text{-}t_k$ pada $db_k = 2$ dan $db_e = 2$ dan pada tingkat signifikansi (α) 0,05 adalah (LIHAT TABEL DISTRIBUSI F) = 19,00

(b) F-tabel untuk baris ($F\text{-}t_b$)

$F\text{-}t_b$ pada $db_b = 1$ dan $db_e = 2$ dan pada tingkat signifikansi (α) 0,05 adalah (LIHAT TABEL DISTRIBUSI F) = 18,51

11. Keputusan statistik

(a) Kolom, dalam hal ini merek mobil

Karena $F\text{-}h_k$ (3,00) lebih kecil daripada $F\text{-}t_k$ (19,00), maka hipotesis nol (H_0) ditolak.

(b) Baris, dalam hal ini kapasitas mesin mobil

Karena F-h_b (4,00) lebih kecil daripada F-t_k (18,51), maka hipotesis nol (H_0) ditolak.

12. Kesimpulan
   (a) Dari hasil analisis varians (ANOVA) di atas dapat disimpulkan bahwa rata-rata efisiensi pemakaian BBM antarmerek mobil (A-1, A-2, dan A-3) terdapat perbedaan nyata.
   (b) Dari hasil analisis varians (ANOVA) di atas dapat disimpulkan bahwa rata-rata efisiensi pemakaian BBM antarkapasitas mesin mobil (1300 cc dan 1500 cc) terdapat perbedaan nyata.
   (c)
13. Penyajian hasil penghitungan dalam Tabel ANOVA

Tabel 7. Tabel ANOVA Efisiensi Pemakaian BBM dari Tiga Merek Mobil dengan Dua Kapasitas Mesin (kilometer/liter)

Sumber Keragaman	**Jumlah Kuadrat (JK)**	**Derajat Bebas (db)**	**Kuadrat Rata-rata (KR)**	**Rasio F (F-hitung)**	**F-tabel**
Kolom	1,00	2	0,50	3,00	19,00
Baris	0,67	1	0,67	4,00	18,51
Galat/*Error*	0,33	2	0,17		
Total	2,00	5			

Anova Dua Faktor atau Dua Arah

Banyak variabel respons atau variabel terikat dipengaruhi oleh lebih dari satu faktor atau variabel bebas. Oleh karena itu, kita sering dituntut untuk melakukan pelbagai eksperimen di mana kita mempelajari efek atau pengaruh dari sejumlah variabel bebas (faktor) terhadap sebuah variabel terikat. Pada kesempatan ini, kita akan mempelajari pengaruh dari dua (2) faktor (variabel bebas) terhadap sebuah variabel terikat. Kita asumsikan bahwa faktor pertama (kita sebut faktor 1) memiliki *a* tingkat atau level (level 1, 2, ……, *a*) dan faktor kedua (kita sebut faktor 2) memiliki b tingkat atau level (level 1, 2, ……, *b*). Yang merupakan perlakuan (*treatment*) di sini adalah kombinasi antara sebuah level faktor 1 dan sebuah level dari faktor 2. Dengan demikian, kita bisa mempelajari sebanyak *ab* perlakuan.

Tujuan dari analisis dua-faktor adalah untuk mengestimasi dan membandingkan pengaruh dari pelbagai perlakuan yang berbeda-beda terhadap variabel bebas atau variabel respon. Bergantung pada situasi tertentu, kita dapat melakukan pengujian untuk melihat apakah terdapat perbedaan nyata atau signifikan (significant differences) pengaruh:

1. antar-level dari faktor 1;
2. antar-level dari faktor 2; dan
3. antar-kombinasi faktor 1 dan 2.

Apabila terdapat perbedaan nyata, kita akan mengestimasi seberapa tinggi tingkat perbedaan tersebut dalam kerangka untuk mengetahui apakah ada keuntungan praktik dari perbedaan tersebut. Selanjutnya, kita bisa mengestimasi pengaruh dari perlakuan tertentu terhadap rata-rata (*mean*) respons (variabel bebas), dan kita bisa memprediksikan nilai individu dari variabel respons atau variabel bebas.

Metode yang kita terapkan untuk tujuan tersebut adalah analisis keragaman dua-arah atau analisis keragaman dua-faktor (*two-way analysis of variance or two-factor analysis of variance*). Sebelum lebih lanjut membicarakan analisis tersebut, kita terlebih dahulu lihat dua definisi berikut.

- Eksperimen faktorial lengkap (*complete factorial experiment*) bisa dilakukan jika kita memilih sebuah sampel yang berkaitan dengan masing-masing dan setiap perlakuan (yakni kombinasi antar-level dari masing-masing faktor).
- Apabila ukuran sampel yang diterapkan untuk semua perlakuan adalah sama, maka eksperimen demikian dikategorikan sebagai eksperimen faktorial lengkap seimbang (*balanced complete factorial experiment*).

Anova dua-arah atau dua-faktor harus memenuhi asumsi-asumsi berikut.

a. Kita melakukan suatu eksperimen faktorial lengkap seimbang (*balanced complete factorial experiment*).
b. Kita menerapkan rancangan eksperimen acak lengkap (*complete randomized experimental design*). Yakni, sampel acak bebas dari unit eksperimen dikaitkan pada perlakuan (*treatment*).

c. Populasi dari semua nilai yang memungkinkan dari variabel respons berkaitan dengan semua perlakuan terdistribusi secara normal.
d. Semua populasi tersebut memiliki varians yang sama.

Menghitung Jumlah Kuadrat dalam Anova Dua-Arah atau Anova Dua-Faktor

1. Jumlah Kuadrat Perlakuan – JKP (*Treatment Sum of Squares*):

$$\text{JKP} = m \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{ij} - \bar{y})^2 \quad (18)$$

2. Jumlah Kuadrat Faktor 1 – JKF-1 (*Sum of Squares due to Factor 1*):

$$\text{JKF-1} = bm \sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2 \quad (19)$$

3. Jumlah Kuadrat Faktor 2 – JKF-1 (*Sum of Squares due to Factor 2*):

$$\text{JKF-2} = am \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2 \quad (20)$$

4. Jumlah Kuadrat Interaksi – JKI (*Sum of Squares due to Interaction of Factor 1 and 2*):

$$\text{JKI} = m \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} - \bar{y})^2 \quad (21)$$

Keterangan:
a: jumlah level faktor 1;
b: jumlah level faktor 2;
m: jumlah ulangan (replikasi).

Menghitung Rata-rata Sampel (*sample mean*)

Sebelum menghitung jumlah kuadrat dengan menggunakan rumus-rumus di atas, kita harus menghitung dulu rata-rata (*mean*) sampel berikut:

1. Rata-rata dari sejumlah *m* nilai yang diobservasi ketika menggunakan level, ke-I faktor 1 dan level ke-j faktro 2:

$$\bar{y}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \text{yijk}}{m} \quad (22)$$

2. Rata-rata sejumlah *bm* nilai yang diobservasi ketika menggunakan level ke-I faktor 1:

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} yijk}{bm} \quad (23)$$

3. Rata-rata sejumlah *am* nilai yang diobservasi ketika menggunakan level ke-j faktor 2:

$$\bar{y}_{.j} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk}}{am} \quad (24)$$

4. Rata-rata total nilai yang diobservasi dalam eksperimen, yakni sebanyak *abm*:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{m} yijk}{abm} \quad (25)$$

Menghitung Rata-rata Kuadrat (*mean squares*)

Setelah keempat nilai rata-rata di atas dihitung, baru kita bisa menghitung jumlah kuadrat dengan menggunakan rumus (1.1), (1.2), (1.3), dan (1.4). Setelah jumlah kuadrat dihitung, langkah selanjutnya adalah menghitung rata-rata kuadrat (*mean squares*) perlakuan (kombinasi antara faktor 1 dan 2), faktor 1, faktor 2, interaksi, dan galat (*error*) dengan rumus berikut.

1. Kuadrat rata-rata perlakuan (KRP):

$$KRP = \frac{JKP}{ab - 1} \quad (26)$$

di mana *a* adalah jumlah level dari faktor 1 dan *b* adalah jumlah level dari faktor 2.

2. Kuadrat rata-rata faktor 1 (KRF-1):

$$KRF\text{-}1 = \frac{JKF\text{-}1}{a - 1} \quad (27)$$

3. Kuadrat rata-rata faktor 2 (KRF-2):

$$\text{KRF-2} = \frac{\text{JKF-2}}{b - 1} \quad (28)$$

4. Kuadrat rata-rata interaksi (KRI):

$$\text{KRI} = \frac{\text{JKI}}{(a - 1)(b - 1)} \quad (29)$$

5. Kuadrat rata-rata galat (KRG):

$$\text{KRG} = \frac{\text{JKG}}{ab(m - 1)} \quad (30)$$

di mana *m* adalah ukuran (jumlah) sampel dalam tidap eksperimen atau biasa juga dikenal sebagai ulangan/replikasi.

Menghitung Nilai F hitung dan Menentukan Derajat Bebas (*degree of freedom*)

1. F hitung untuk perlakuan yang digunakan untuk menguji hipotesis:

   H_0 = semua nilai rata-rata perlakuan adalah sama
   H_1 = minimal dua dari rata-rata perlakuan berbeda

$$F_P\text{-hitung} = \frac{\text{KRP}}{\text{KRG}} \quad (31)$$

   Derajat bebas untuk mencari nilai F kritik atau F-tabel ($F_{[\alpha, (ab-1), (ab(m-1))]}$) adalah:
   - pembilang (numerator) = $ab - 1$ [garis horisontal pada tabel F]
   - penyebut (denominator = $ab(m - 1)$ [garis vertikal pada tabel F]

2. F hitung untuk faktor 1 yang digunakan untuk menguji hipotesis:

   H_0 = semua nilai rata-rata level dalam faktor 1 adalah sama
   H_1 = minimal dua dari rata-rata level dalam faktor 1 berbeda

$$F_{F\text{-}1}\text{-hitung} = \frac{\text{KRF-1}}{\text{KRG}} \quad (32)$$

Derajat bebas untuk mencari nilai F kritik atau F-tabel ($F_{[\alpha, (a-1), (ab(m-1))]}$) adalah:

- pembilang (numerator) = $a - 1$ [garis horisontal pada tabel F]
- penyebut (denominator = $ab(m - 1)$ [garis vertikal pada tabel F]

3. F hitung untuk faktor 2 yang digunakan untuk menguji hipotesis:

H_0 = semua nilai rata-rata level dalam faktor 2 adalah sama
H_1 = minimal dua dari rata-rata level dalam faktor 2 berbeda

$$F_{F\text{-}1}\text{-hitung} = \frac{KRF\text{-}2}{KRG} \qquad (33)$$

Derajat bebas untuk mencari nilai F kritik atau F-tabel ($F_{[\alpha, (b-1), (ab(m-1))]}$) adalah:

- pembilang (numerator) = $b - 1$ [garis horisontal pada tabel F]
- penyebut (denominator = $ab(m - 1)$ [garis vertikal pada tabel F]

4. F hitung untuk interaksi yang digunakan untuk menguji hipotesis:

H_0 = antara faktor 1 dan faktor 2 tidak terdapat interaksi
H_1 = terdapat antara faktor 1 dan faktor 2

$$F_{Int}\text{-hitung} = \frac{KRI}{KRG} \qquad (34)$$

Derajat bebas untuk mencari nilai F kritik atau F-tabel ($F_{[\alpha; ((a-1)(b-1)); (ab(m-1))]}$) adalah:

- pembilang (numerator) = $(a - 1)(b - 1)$ [garis horisontal pada tabel F]
- penyebut (denominator = $ab(m - 1)$ [garis vertikal pada tabel F]

Tabel Susunan Data dari Suatu Eksperimen dengan 2 Faktor (Faktor 1 dengan 3 [a=3] Level dan Faktor 2 dengan 2 Level [b=2] dan 3 (m=3) Ulangan/Replikasi

Faktor 1 [i (1; 2; …; *a*)]	Faktor 2 [j (1; 2; …; *b*)]		
	A	B	$\bar{y}_{i.}$
P	y_{111} (y_{ijk})	y_{121}	k (1; 2; …; *m*)
	y_{112}	y_{122}	
	y_{113}	y_{123}	
	$\bar{y}_{11}$ ($\bar{y}_{ij}$)	$\bar{y}_{12}$	$\bar{y}_{1.}$
Q	y_{211}	y_{221}	k (1; 2; …; *m*)
	y_{212}	y_{222}	
	y_{213}	y_{223}	
	$\bar{y}_{21}$	$\bar{y}_{22}$	$\bar{y}_{2.}$
R	y_{311}	y_{321}	k (1; 2; …; *m*)
	y_{312}	y_{322}	
	y_{313}	y_{323}	
	$\bar{y}_{31}$	$\bar{y}_{32}$	$\bar{y}_{3.}$
$\bar{y}_{.j}$	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	$\bar{y}$

Referensi

Sanders, D. H. 1995. Statistics: A First Course. Fifth Edition. McGraw-Hill Inc. New York. NY. USA.

Naiman, A., R. Rosenfeld, and G. Zirkel. 1986. Understanding Statistics. Third Edition. McGraw-Hill International Editions: Mathematics and Statistics Series. New York. NY. USA.

Levin, R.I., and D. S. Rubin. 1994. Statistics for Management. Sixth Edition. Prentice Hall. Engelwood Cliffs. New Jersey. USA.