Bahan Kuliah Statistik 2

# PENGUJIAN HIPOTESIS

Toto Sugiharto

**Fakultas Ekonomi**
**Universitas Gunadarma**
**2009**

# Pengujian Hipotesis

(*Hypthesis Testing*)

**Beberapa Definisi Penting (*Important Definitions*)**

a. Hipotesis (*Hypothesis*): Pernyataan tentang karakteristik suatu populasi, utamanya, nilai parameter populasi.

b. Hipotesis Nol (*Null Hypothesis*) $H_0$: Pernyataan tentang nilai parameter suatu populasi yang diasumsikan akan benar jika kita melakukan uji suatu hipotesis. Pertanyaan dimaksud harus berisi persyaratan kesamaan dan harus ditulis dengan salah satu dari ketiga simbol berikut: <= (lebih kecil atau sama dengan); >= (lebih besar atau sama dengan); atau = (sama dengan).

   (Catatan: *Meskipun kita bisa mengekspresikan $H_0$ dengan simbol ≤ atau ≥, kita selalu melakukan uji dengan mengasumsikan bahwa simbol = berlaku. Kita harus melakukan pengujian dengan menggunakan nilai spesifik-pasti untuk parameter dimaksud sehingga kita bisa bekerja dengan suatu distribusi yang spesifik pula*).

c. Hipotesis Alternatif/Penelitian (*Alternative/Research Hypothesis*) $H_1$: Pernyataan tentang nilai paramater suatu populasi yang harus benar jika hipotesis nol $H_0$ ternyata salah. Pernyataan harus ditulis dengan menggunakan satu dari ketiga simbol berikut: < (lebih kecil); > (lebih besar); atau = (sama dengan). Pemakaian simbol pertama (<) dan kedua (>), hipotesis alternatif dikategorikan sebagai *bersisi-satu* (*one-sided*) atau berekor-satu (*one-tailed*). Sedangkan untuk pemakaian simbol terakhir (=), hipotesis alternatif dikategorikan sebagai bersisi-dua (*two-sided*) atau berekor-dua (*two-tailed*).

d. <u>Uji Statistik (*Test Statistic*)</u>: Suatu statistik, yang diukur dari sejumlah data sampel, yang kita gunakan untuk mengakses bukti yang bertentangan (berlawanan) dengan hipotesis nol $H_0$. Secara umum dikatakan bahwa statistik dimaksud akan memiliki beberapa distribusi yang telah diketahui yang akan bergantung pada:
   (i) parameter yang sedang dikaji;
   (ii) ukuran sampel; dan/atau
   (iii) populasi dari mana sampel dimaksud diambil.

e. <u>Nilai-P dari Suatu Pengujian (*P Value of a Test*)</u>: Probabilitas dalam mengobservasi nilai dari suatu uji statistik yang, <u>paling tidak</u> (*at least*), sama ekstrimnya dengan nilai dari suatu uji statistik yang diambil dari data sampel, dengan asumsi bahwa hipotesis nol $H_0$ ternyata benar. Nilai-P adalah ukuran dari jumlah pasti dari bukti yang bertentangan (berlawanan) dengan $H_0$ di mana <u>semakin kecil nilai-P</u>, semakin banyak bukti yang bertentangan (berlawanan) dengan $H_0$.

   <u>Contoh</u>: Umpama anda melakukan uji dengan "sampel-besar" dari $H_0$: $\mu = \mu_0$ yang dipertentangkan dengan hipotesis alternatif $H_1$, di mana $\mu$ = rata-rata dari suatu distribusi normal dengan nilai <u>deviasi standar</u> atau <u>simpangan baku</u> (*standard deviation*) $\sigma$ dan $\mu_0$—dengan nilai tertentu—yang telah diketahui. Kemudian, diketahui bahwa nilai z dari uji statistik yang dikaji adalah:

$$z = \frac{\xi - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

   Nilai-P dihitung dengan cara sebagai berikut.

   if $H_1$: $\mu > \mu_0$, P-value = $P(Z \geq z)$
   if $H_1$: $\mu < \mu_0$, P-value = $P(Z \leq z)$
   if $H_1$: $\mu = \mu_0$, P-value = $2P(Z \geq z)$ if $z \geq 0$
   $= 2P(Z \leq z)$ if $z < 0$

Rumus nilai-P yang sama akan berlaku untuk uji $H_0$: $p = p_0$, di mana $p$ adalah proporsi populasi, dalam keadaan bahwa syarat "sampel-besar" untuk membuat kesimpulan tentang $p$ dipenuhi.

f. Tingkat Signifikansi (*Significance Level*): Tentukan $\alpha$ sebagai nilai pasti (*fixed value*) sehingga $0 < \alpha < 1$. Dengan demikian hasil dari suatu uji hipotesis dikatakan secara statistik signifikan/nyata (*statistically significant*) pada tingkat $\alpha$ jika dan hanya jika nilai-P dari uji dimaksud lebih kecil daripada atau sama dengan ($\leq$) $\alpha$. Dalam kasus seperti ini, kita katakan bahwa hipotesis nol $H_0$ ditolak pada tingkat signifikansi $\alpha$. Jika nilai-P dari uji dimaksud lebih besar daripada $\alpha$, maka kita katakan bahwa kita gagal menolak hipotesis nol $H_0$ pada tingkat signifikansi $\alpha$.

Suatu tingkat signifikansi merupakan representasi dari bukti standar (*standard evidence*) yang kita putuskan di depan sebagai titik-batas (*cut-off point*) di bawah mana nilai-P akan diambil untuk mewakili bukti yang secara statistik signifikan/nyata bertentangan (berlawanan) dengan hipotesis nol $H_0$ dan berpihak (*in favor of*) kepada hipotesis alternatif $H_1$. Pilihan tingkat signifikansi yang paling umum dalam praktik adalah 0,05 (tingkat signifikansi 5%) dan 0,01 (tingkat signifikansi 1%).

Perlu kita catat bahwa signifikansi statistik (*statistical significance*) dan apa yang biasa dipahami oleh umum sebagai signifikan (*significant*) bukan merupakan hal yang sama. Di bawah kondisi yang benar/tepat, perbedaan angka yang kecil sekali pun antara nilai uji statistik dan nilai parameter di bawah hipotesis alternatif $H_0$, dapat dikatakan sebagai signifikan secara statistik.

g. Daerah Kritis atau Daerah Penolakan (*Critical or Rejection Region*): Seperangkat nilai dari uji statistik yang dapat menyebabkan kita untuk menolak hipotesis nol $H_0$ dan berpihak kepada hipotesis alternatif $H_1$. Jika nilai uji statistik berada di dalam daerah kritis, kita menolak $H_0$ dan menerima $H_1$; jika berada di luar daerah kritis, kita gagal menolak $H_0$. Ukuran daerah kritis bergantung kepada tingkat signifikansi dari uji yang kita lakukan. Semakin kecil $\alpha$, daerah kritis akan semakin sempit, dan bukti yang lebih kuat yang berlawanan dengan $H_0$ dibutuhkan untuk menolak $H_0$.

h. Ketidaksamaan Kritis (*Critical Inequality*): Suatu ketidaksamaan, berdasarkan uji statistik dan nilai tingkat signifikansi $\alpha$, yang memungkinkan kita untuk secara sepintas mendeterminasi apakah nilai uji statistik berada dalam daerah kritis atau tidak. Ketidaksamaan kritis secara khusus bermanfaat dalam kasus-kasus ketika nilai-P sukar untuk dihitung secara manual.

i. Kekeliruan Tipe I (*Type I Error*): Kekeliruan dalam menolak hipotesis nol $H_0$ ketika hipotesis dimaksud ternyata benar. Probabilitas untuk melakukan kekeliruan tipe ini adalah sama dengan tingkat signifikansi, $\alpha$, dari uji yang dilakukan.

j. Kekeliruan Tipe II (*Type II Error*): Kekeliruan dalam kegagalan menolak hipotesis nol $H_0$ ketika hipotesis dimaksud ternyata salah. Yakni ketika hipotesis alternatif $H_1$ ternyata benar. Probabilitas untuk membuat kekeliruan tipe ini dilambangkan dengan $\beta$. Nilai spesifik $\beta$ akan bergantung kepada nilai alternatif di mana parameter diasumsikan berada di bawah $H_1$ ketika $H_0$ ternyata salah. Dengan demikian, $\beta$ tidak lain adalah fungsi dari parameter.

k. Pangkat suatu Pengujian (*Power of a Test*): Probabilitas untuk menolak hipotesis nol $H_0$ ketika hipotesis dimaksud ternyata salah, yakni probabilitas untuk secara tepat menyadari bahwa hipotesis nol $H_0$ ternyata salah.

Pangkat dimaksud sama dengan 1 - $\beta$, dengan nilai spesifik bergantung kepada nilai alternatif di mana parameter diasumsikan berada di bawah hipotesis alternatif $H_1$. Dengan demikian, seperti halnya $\beta$, pangkat dimaksud adalah fungsi dari parameter. Pangkat ini merupakan ukuran dari analisis sensitivitas (*sensitivity analysis*) dari uji yang dilakukan. Suatu uji dengan pangkat tinggi akan menampakkan diri ketika hipotesis nol $H_0$ ternyata salah dengan menghasilkan penolakan atas $H_0$.

Grafik antara pangkat 1 - $\beta$ dan nilai-nilai alternatif yang memungkinkan dari parameter yang berbeda di bawah hipotesis alternatif $H_1$ dinamakan kurva pangkat (*a power curve*) atau kurva karakteristik (*a characteristic curve*). Suatu uji dengan pangkat tinggi, (yang ternyata lebih disukai) akan menampakkan kurva pangkat yang naik secara tajam.

**Tuntunan dalam Memilih $H_0$ dan $H_1$ (*Guidelines of Choosing* $H_0$ *and* $H_1$)**

Jika kita berkeinginan untuk secara langsung menguji suatu pernyataan tentang parameter, maka lambangkan pernyataan tersebut sebagai $H_0$ (hipotesis nol). Kemudian, tulis hipotesis alternatif $H_1$ sehingga hipotesis dimaksud melingkupi semua nilai parameter yang tidak termasuk ke dalam rentang nilai yang dilingkupi oleh hipotesis nol, $H_0$.

Contoh: Seorang dosen suatu matakuliah menyatakan bahwa rata-rata nilai ujian akhir mahasiswanya paling rendah (*at least*) 55. Untuk menguji pernyataan tersebut, kita boleh menggunakan hipotesis nol $H_0$: $\mu$ >= 55 dan hipotesis alternatif $H_1$: $\mu$ < 55. (Dalam praktik kita hanya akan menguji $H_0$: $\mu$ = 55; jika $H_0$: $\mu$ = 55 ditolak dan berpihak kepada $H_1$: $\mu$ < 55, maka tentu hipotesis nol akan ditolak untuk semua nilai $\mu$ lebih besar daripada 55). Jika $H_0$ ditolak dan berpihak kepada $H_1$, maka terdapat bukti yang cukup untuk menyanggah pernyataan dosen di atas. Jika $H_0$ tidak ditolak, maka tidak ada cukup bukti untuk menyanggah pernyataan di atas.

Jika kita berkeinginan untuk melihat apakah terdapat bukti yang mendukung atau alasan untuk mempercayai suatu pernyataan tentang suatu parameter, maka lambangkan pernyataan dimaksud sebagai hipotesis alternatif $H_1$, dan tulis hipotesis nol $H_0$ yang hanya menyangkut satu nilai (yang akan dideterminasi oleh rentang yang dilingkupi oleh hipotesis alternatif $H_1$). Dalam hal ini, pernyataan dalam hipotesis alternatif $H_1$ biasa dinamakan sebagai hipotesis penelitian (*research hypothesis*).

Contoh: Dekan suatu fakultas meyakini bahwa rata-rata gaji pertama lulusan fakultasnya adalah lebih besar daripada Rp500.000. Untuk mengakses bukti yang mendukung klaim tersebut, dekan dimaksud perlu melakukan uji atas hipotesis nol $H_0$: $\mu \leq 500.000$ "melawan" hipotesis penelitian $H_1$: $\mu > 500.000$. Jika hipotesis nol $H_0$ ditolak (artinya menerima $H_1$), maka terdapat cukup bukti untuk mendukung keyakinan dekan tersebut di atas. Jika hipotesis nol $H_0$ gagal ditolak, maka tidak cukup bukti untuko mendukung keyakinan dekan dimaksud.

**Menulis Laporan Hasil Uji Hipotesis (*Reporting Results of a Test*)**

Kita bisa melaporkan hasil suatu uji dalam 2 (dua) cara, yaitu sebagai berikut.

1. Secara ringkas melaporkan hasil pengujian pada tingkat signifikansi $\alpha$ tertentu, yakni menolak atau gagal menolak hipotesis nol $H_0$. Yakni, melaporkan apakah nilai uji statistik memenuhi (syarat) ketidaksamaan kritis.
2. Melaporkan nilai-P dari uji yang dilakukan.

Keunggulan dari pendekatan "menolak" dibandingkan dengan "gagal menolak" dari suatu pengujian:

a. Pendekatan ini bermuara pada jawaban yang definitif dan objektif, berdasarkan pada nilai $\alpha$ yang kita tentukan. (Dalam beberapa kasus, $\alpha = 0,05$ atau $\alpha = 0,01$ dipilih oleh para peneliti untuk menunjukkan keberadaan bukti yang cukup kuat untuk menolak hipotesis nol $H_0$).

b. Penghitungannya cukup sederhana dan bisa dikerjakan secara manual, sementara menghitung nilai pasti dari nilai-P secara manual untuk kasus tertentu cukup sulit.

Keunggulan pendekatan nilai-P dari suatu pengujian:

a. Nilai-P memberikan ukuran pasti dari bukti yang bertentangan dengan hipotesis nol $H_0$.
b. Dengan mengetahui nilai-P memungkinkan kita untuk secara cepat melihat hasil pengujian pada semua tingkat signifikansi $\alpha$ yang memungkinkan, tidak hanya pada satu tingkat signifikansi $\alpha$. Untuk melihat hasil pada tingkat signifikansi $\alpha$, secara singkat bandingkan nilai-P dengan $\alpha$; jika nilai-P $\leq \alpha$, maka hipotesis nol $H_0$ ditolak pada tingkat signifikansi $\alpha$.
c. Perkembangan dalam perangkat lunak komputer dan kalkulator untuk menghitung hasil pengujian telah membuat keunggulan pendekatan "menolak atau gagal menolak" menjadi tidak begitu penting.
d. Jika dua nilai uji statistik sangat berdekatan (hampir sama), tetapi yang satu berada di dalam daerah kritis sementara yang lainnya berada di luar, maka pendekatan " menolak atau gagal menolak" akan bermuara pada dua hasil yang samasekali berbeda untuk dua perangkat (set) data yang sama, sementara nilai-P dari kedua data tersebut hampir sama, suatu refleksi yang lebih akurat tentang hubungan nyata antarkedua perangkat data dimaksud.

**Contoh Pengujian Hipotesis**

Prosedur Pengujian (*Test Procedures*)

Catatan: Dalam prosedur pengujian berikut, kita mengasumsikan bahwa kita melakukan pengujian pada tingkat signifikansi $\alpha$. Jika nilai-P digunakan, maka kita menolak hipotesis nol $H_0$ pada tingkat signifikansi $\alpha$ jika nilai-P $\leq \alpha$ dan gagal menolak hipotesis nol $H_0$ pada tingkat signifikansi $\alpha$ jika nilai-P $> \alpha$.

a. Menguji hipotesis nol $H_0$: $\mu = \mu_0$ ($\mu$ adalah rata-rata populasi) berdasarkan pada distribusi normal standar

Uji statistik:

$$z = \frac{x - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (2)$$

Ketidaksamaan kritis dan nilai-P:

| | |
|---|---|
| $H_1$: $\mu > \mu_0$ | Tolak $H_0$ jika $z > z^{\alpha}$ |
| | Nilai-P: $P(Z >= z) = 1 - \Phi(z)$ |
| $H_1$: $\mu < \mu_0$ | Tolak $H_0$ jika $z < -z^{\alpha}$ |
| | Nilai-P: $P(Z <= z) = \Phi(z)$ |
| $H_1$: $\mu \neq \mu_0$ | Tolak $H_0$ jika $\lvert z \rvert > z^{\alpha}/2$ |
| | Nilai-P: $2P(1 - \Phi(\lvert z \rvert))$ |

Asumsi:

a. Data diambil dari suatu distribusi $N(\mu, \sigma)$ dengan $\sigma$ diketahui.
b. Data diambil dari suatu distribusi $N(\mu, \sigma)$ dengan $\sigma$ diketahui tetapi nilai n-nya besar ($n \geq 30$).
c. Data diambil dari suatu distribusi *arbitrary* dengan nilai rata-rata $\mu$ tidak diketahui dan varians $\sigma^2$ terbatas tidak diketahui, dengan nilai n besar. (Ingat teorema limit tengah/Central Limit Theorem).

b. <u>Menguji hipotesis nol $H_0$: $p = p_0$ ($p$ adalah proporsi populasi yang berhasil)</u>

Uji statistik:

$$z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} \qquad (3)$$

($p$ = proporsi sampel yang berhasil)

Ketidaksamaan kritis and nilai-P:

| | |
|---|---|
| $H_1$: $p > p_0$ | Tolak $H_0$ jika $z > z^{\alpha}$ |
| | Nilai-P: $P(Z >= z) = 1 - \Phi(z)$ |
| $H_1$: $p < p_0$ | Tolak $H_0$ jika $z < -z^{\alpha}$ |
| | Nilai-P: $P(Z <= z) = \Phi(z)$ |
| $H_1$: $p \neq p_0$ | Tolak $H_0$ jika $\lvert z \rvert > z^{\alpha}/2$ |
| | Nilai-P: $2P(1 - \Phi(\lvert z \rvert))$ |

Asumsi:

a. Sampel acak ukuran *n* diambil dari suatu populasi besar untuk mana proporsi populasi yang berhasil = *p.*

b. *n* cukup besar sehingga memungkinkan kita untuk menggunakan aproksimasi normal atas distribusi binomial: $np_0$, $n(1 - p_0) >= 10$.

c. <u>Menguji hipotesis nol $H_0$: $\mu = \mu_0$ berdasarkan pada distribusi t dengan derajat bebas $\nu$ (df) = n – 1</u>

Uji statistik:

$$t = \frac{\mu - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (4)$$

Ketidaksamaan kritis dan nilai-P:

| | |
|---|---|
| $H_1$: $\mu > \mu_0$ | Tolak $H_0$ jika $t > t^{\alpha}$ |
| $H_1$: $\mu < \mu_0$ | Tolak $H_0$ jika $t < -t^{\alpha}$ |
| $H_1$: $\mu \neq \mu_0$ | Tolak $H_0$ jika $\lvert t \rvert > t^{\alpha/2}$ |

Asumsi:

Data diambil dari distribusi $N(\mu, \sigma)$ dengan $\sigma$ tidak diketahui dan nilai *n*-nya kecil (*n* < 40).

<u>Catatan</u>:

Dalam hal ini, penghitungan nilai-P yang pasti menggunakan tabel t biasanya tidak memungkinkan. Kita bisa memperoleh nilai-P dengan menggunakan kalkulator atau Minitab.

d. <u>Menguji hipotesis nol $H_0$: $\sigma^2 = \sigma^2_0$ ($\sigma^2$ adalah varians populasi) berdasarkan distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas v = n -1</u>

Uji statistik:

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma_0^2} \qquad (5)$$

Ketidaksamaan kritis dan nilai-P:

| | |
|---|---|
| $H_1$: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ | Tolak $H_0$ jika $\chi^2 > \chi^{2\alpha}$ |

$H_1: \mu < \mu_0$ Tolak $H_0$ jika $\chi^2 < -\chi^2_{(1-\alpha)}$

$H_1: \mu \neq \mu_0$ Tolak $H_0$ jika $\chi^2 > \chi^2_{(\alpha/2)}$

atau $\chi^2 > \chi^2_{(1-\alpha/2)}$

Asumsi:

Data diperoleh dari distribusi $N(\mu, \sigma)$.

**Rumus-rumus Penting**

Ukuran sampel untuk menguji hipotesis nol $H_0$: $\mu = \mu_0$

Dimisalkan kita sedang menguji hipotesis nol H0: $\mu = \mu_0$ dipertentangkan dengan hipotesis bersisi-satu, baik $H_1$: $\mu > \mu_0$ maupun $H_1$: $\mu < \mu_0$. Lebih lanjut dimisalkan bahwa tingkat signifikansi dari uji ini adalah $\alpha$ dan apabila $H_1$ ternyata benar dan nilai $\mu$ yang sebenarnya sama dengan $\mu_1$, probabilitas untuk melakukan kekeliruan tipe II adalah $\beta$ (atau ekivalen dengan pangkat uji adalah $1 - \beta$). Ukuran sampel *n* yang akan menghasilkan kekeliruan dimaksud diberikan melalui rumus:

$$n = \frac{\sigma^2(z_\alpha - z_\beta)^2}{(\mu_0 - \mu)^2} \qquad (6)$$

Jika kita menguji hipotesis nol $H_0$: $\mu = \mu_0$ "melawan" hipotesis bersisi-dua $H_1$: $\mu \neq \mu_0$, kemudian ukuran sampel n yang akan menghasilkan kekeliruan di atas diperoleh dengan rumus:

$$n = \frac{\sigma^2(z_\alpha - z_\beta)^2}{(\mu_0 - \mu)^2} \qquad (7)$$

Dalam kedua kasus di atas, kita diharuskan untuk membulatkan ke atas ke arah bilangan bulat terdekat jika kita memperoleh jawaban bilangan tak-bulat.

Pengujian Hipotesis untuk Rata-rata Populasi Tunggal dengan Jumlah Populasi Takberhingga (INFINITE) dan Ukuran Sampel (n) Besar ($n \geq 30$)

Contoh 1a (Standar Deviasi Populasi ($\sigma$) Diketahui)

Seorang pejabat Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi menyatakan bahwa rata-rata IPK (Indeks Prestasi Kumulatif) mahasiswa Indonesia adalah tidak kurang dari (>) 2,7. Untuk membuktikan benar-tidaknya pernyataan tersebut, dilakukan analisis statistik—dalam hal ini—pengujian hipotesis.

Pernyataan pejabat di atas, dapat dikategorikan sebagai suatu hipotesis, yakni hipotesis alternatif atau hipotesis penelitian $H_1$.

Dengan demikian,

Hipotesis nol $H_0$: $\mu = 2,7$ ($\mu$ = rata-rata IPK)

Hipotesis alternatif $H_1$: $\mu > 2,7$

Uji statistik yang dipakai dalam pengujian hipotesis ini adalah:

$$z = \frac{\xi - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (8)$$

di mana:

$\xi$ = rata-rata hitung sampel

$\mu$ = rata-rata hitung populasi

$\sigma$ = deviasi standar populasi

n = jumlah (ukuran) sampel

Di sini berlaku pengujian hipotesis bersisi-satu (*one-sided*). Dengan demikian, keputusan statistiknya adalah:

$H_0$ ditolak jika

1. Menggunakan nilai z: nilai z-hitung lebih besar daripada z-tabel (z-hitung > z-tabel).
2. Menggunakan nilai P: nilai P lebih kecil daripada tingkat signifikansi $\alpha$ ($P < \alpha$). Di mana P = P(Z).

Untuk pengujian hipotesis ini, dilakukan penelitian. Ukuran sampel (n) adalah 100. Setelah dihitung, ternyata IPK rata-rata sampel (x-bar) adalah 2,9. Deviasi standar populasinya ($\sigma$) adalah 0,6. Tingkat signifikansi ($\alpha$) adalah 0,05 (5%). Dengan demikian, uji statistik, z, adalah:

$$Z = \frac{2.9 - 2.7}{0.6/\sqrt{100}} = \frac{0.2}{0.06} = 3.33$$

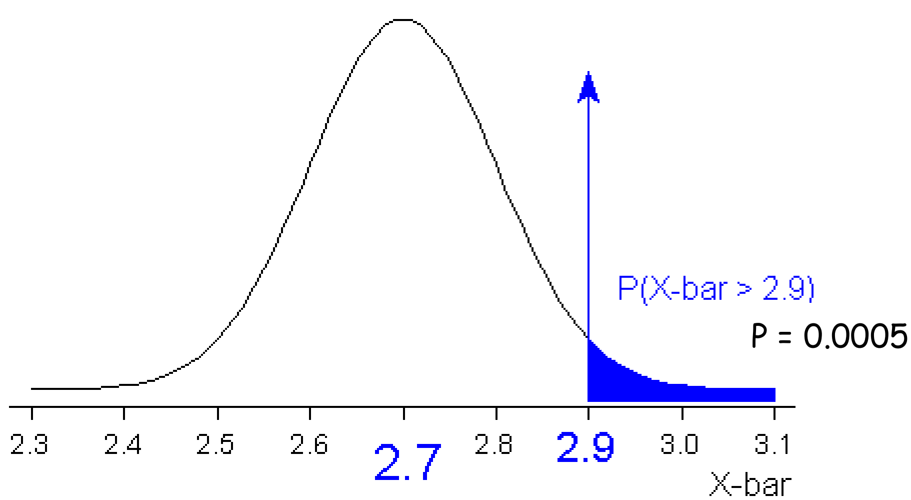
<u>Keputusan statistik</u>:

1. Menggunakan nilai z

   Nilai Z-tabel pada tingkat signifikansi 0,05 (5%) atau $z_{(0.05)}$ atau z(0.4500) adalah, setelah diinterpolasi, 1,645 (LIHAT TABEL DISTRIBUSI Z). Karena z-hitung (3,33) lebih besar daripada z-tabel (3,33 > 1,645), disimpulkan bahwa $H_0$ ditolak.

2. Menggunakan nilai-P

   Probabilitas untuk memperoleh rata-rata hitung yang berkaitan dengan nilai z-hitung 3,33 (LIHAT TABEL DISTRIBUSI Z) adalah 0.4996. Artinya, probabilitas (nilai-P) untuk memperoleh rata-rata hitung lebih besar dari 2,9 adalah <u>0,0004</u> (0,5 – 0,4996). Karena P (0,0004) < $\alpha$ (0,05) atau P < 0,05, disimpulkan bahwa hipotesis nol ditolak.



Dari kedua keputusan statistik tersebut di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa rata-rata IPK mahasiswa Indonesia tidak sama dengan 2,7 melainkan lebih besar dari 2,7.

Contoh 2a (Standar Deviasi Populasi ($\sigma$) Tidak Diketahui):

Seorang manajer Pemasaran Perusahaan Telekomunikasi memperkirakan bahwa rata-rata lama pembicaraan telepon konsumennya telah mengalami perubahan dari 3,8 menit dalam setiap jam. Pengujian hipotesis untuk mengkaji ketepatan perkiraan tersebut perlu dilakukan.

| | |
|---|---|
| Hipotesis nol | $H_0$: $\mu = 3,8$ ($\mu$ = rata-rata lama bicara/jam) |
| Hipotesis alternatif | $H_1$: $\mu \neq 3,8$ |

Uji statistik yang dipakai dalam pengujian hipotesis ini adalah:

$$Z = \frac{\xi - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (9)$$

di mana:

$\xi$ = rata-rata hitung sampel

$\mu$ = rata-rata hitung populasi

s = deviasi standar sampel

n = jumlah (ukuran) sampel

Di sini berlaku pengujian hipotesis bersisi-dua (*two-sided*). Dengan demikian, keputusan statistiknya adalah:

$H_0$ ditolak jika

1. Menggunakan nilai z: nilai z-hitung lebih besar daripada z-tabel (z-hitung > z-tabel).
2. Menggunakan nilai P: nilai P lebih kecil daripada tingkat signifikansi $\alpha$ ($P < \alpha$). Di mana P = 2P(Z).

Seratus (100) pelanggan secara acak dipilih sebagai sampel. Dari hasil perhitungan diperoleh angka rata-rata sampel 4,0 menit/jam. Deviasi standar sampel tersebut (s) adalah 0,5 menit. Tingkat signifikansi ($\alpha$) adalah 0,02 (2%).

Uji statistik yang dipakai dalam pengujian hipotesis ini adalah:

$$Z = \frac{\xi - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{4 - 3.8}{0.5/\sqrt{100}} = \frac{0.2}{0.05} = 4{,}00$$

<u>Keputusan statistik</u>:

1. Menggunakan nilai z

   Nilai Z-tabel pada tingkat signifikansi 0,02 (2%) atau $z_{(0.02)}$ atau z(0.4800) adalah 2.05 (LIHAT TABEL DISTRIBUSI Z). Karena z-hitung (4,00) lebih besar daripada z-tabel (2,33), yakni 4,00 > 2,05, disimpulkan bahwa $H_0$ ditolak.

2. Menggunakan nilai-P

   Probabilitas untuk memperoleh rata-rata hitung yang berkaitan dengan nilai z-hitung 4,00 (LIHAT TABEL DISTRIBUSI Z) adalah 0.4999. Artinya, probabilitas (nilai-P) untuk memperoleh rata-rata hitung lebih besar dari 4,00 atau kurang dari 3,6 (3,8 – [4,0 –3,8]) adalah 2 x 0,0001 (2 x [1 – 0,4999]), yakni 0,0002. Karena P (0,0002) < $\alpha$ (0,02) atau P < 0,02, disimpulkan bahwa hipotesis nol ditolak.

Dari kedua keputusan statistik tersebut di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa rata-rata lama bicara konsumen tidak sama dengan 3,8 menit/jam melainkan lebih besar dari 3,8.

Pengujian Hipotesis untuk Rata-rata Populasi Tunggal dengan Ukuran Sampel Kecil (kurang dari [<] 30) dan Deviasi Standar Populasi ($\sigma$) Tidak Diketahui

Untuk kondisi seperti ini uji statistik yang digunakan adalah uji t sebagai berikut:

$$t = \frac{\xi - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (10)$$

di mana:

$\xi$ = rata-rata hitung sampel

$\mu$ = rata-rata hitung populasi

s = deviasi standar sampel

n = jumlah (ukuran) sampel

$H_0$ ditolak jika

1. Menggunakan nilai t: nilai t-hitung lebih besar daripada t-tabel (t-hitung > t-tabel).
2. Menggunakan nilai P: nilai P lebih kecil daripada tingkat signifikansi $\alpha$ ($P < \alpha$). Di mana P = 2P(Z).

Contoh 1b:

Manajer produksi pabrik kabel baja memperkirakan bahwa kekuatan kabe; baja buatan prabriknya adalah kurang dari (<) 1 ton. Untuk menguji hipotesis manajer tersebut dilakukan suatu pengujian.

Hipotesis nol $H_0$: $\mu = 1$

Hipotesis alternatif $H_1$: $\mu < 1$

Di sini berlaku pengujian hipotesis bersisi-satu (*one-sided*).

Tingkat signifikansi yang dipilih $\alpha$ adalah 0,05 (5%). Derajat bebasnya adalah n-1.

Untuk keperluan tersebut, diambil 10 lempeng kabel baja untuk diuji. Hasil uji tersebut menunjukkan bahwa rata-rata kekuatannya adalah 0,96 ton dengan deviasi standar sampel 0,15 ton.

Karena jumlah atau ukuran sampelnya (n) kecil, yakni 10, maka uji statistiknya adalah distribusi t:

$$t = \frac{\xi - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (11)$$

di mana:

$\xi$ = rata-rata hitung sampel

$\mu$ = rata-rata hitung populasi

s = deviasi standar sampel

n = jumlah (ukuran) sampel

Berdasarkan hasil pengukuran kekuatan, nilai t adalah:

$$t = \frac{\xi - \mu}{\delta/\sqrt{n}} = \frac{0.96 - 1}{0.15/\sqrt{10}} = \frac{-0.04}{0.047} = -0,84$$

Tingkat signifikansi $\alpha$ = 0,05 (5%) dengan derajat bebas = 9 (10 – 1), t-tabelnya adalah (LIHAT TABEL DISTRIBUSI t) ($t_{0,05;\ df:\ 9}$) 1,833. Karena nilai tersebut berada di bawah kurva rata-rata, maka nilainya menjadi –1,833.

<u>Keputusan statistik</u>:

1. Menggunakan nilai t: t-hitung (-0,84) lebih besar daripada t-tabel (-1,833). Oleh karena itu, $H_0$ tidak bisa (gagal) ditolak.
2. Menggunaka nilai-P: jika dihitung dengan menggunakan salah satu program statistik (Minitab atau SPSS) nilai P untuk t =-0,84 adalah 0,1977. Karena P lebih besar daripada $\alpha$ (tingkat signifikansi = 0,05), maka $H_0$ tidak bisa (gagal) ditolak.

Dari hasil pengujian hipotesis di atas, dapat disimpulkan bahwa kabel baja dari pabrik dalam contoh ini kekuatan rata-ratanya adalah 1 ton.

Contoh 2b:

Manajer Restoran Cepat-Saji Mang Dulloh ingin menguji kebenaran pendapat konsultannya bahwa hamburger buatannya mengandung lemak rata-rata 4 gram. Pengujian hipotesis dilakukan untuk tujuan di atas.

Hipotesis nol $H_0$: $\mu = 4{,}00$

Hipotesis alternatif $H_1$: $\mu \neq 4{,}00$

Pengujian hipotesis bersisi-dua (*two-tailed*) berlaku di sini.

Sang manajer, untuk tujuan pengujian hipotesis, secara acak membeli sejumlah hamburger dari 9 toko/cabang. Kemudian dengan cara tertentu mengukur kandungan lemaknya. Hasil pengukuran tersebut adalah sebagai berikut.

3,3 4,8 5,1 4,5 4,0 3,9 4,7 5,0 dan 3,6

Rata-rata kandungan lemak sampel adalah 3,22 gram dengan deviasi standar 0,644.

Karena jumlah (ukuran) sampelnya (n) hanya 9, maka uji statistik yang dipakai adalah uji t:

$$t = \frac{\xi - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (12)$$

di mana:

$\xi$ = rata-rata hitung sampel

$\mu$ = rata-rata hitung populasi

s = deviasi standar sampel

n = jumlah (ukuran) sampel

Tingkat signifikansi ($\alpha$) adalah 0,05 (5%).

Berdasarkan hasil pengukuran di atas diperoleh nilai t:

$$t = \frac{\xi - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{4.322 - 4.000}{0.644/\sqrt{9}} = \frac{0.322}{0.215} = 1,500$$

<u>Kepuutusan statistik</u>:

1. Menggunakan nilai t:
   Pada tingkat signifikansi 0,05 untuk uji hipotesis bersisi-dua dengan derajat bebas 8 (9-1) nilai t-tabel (LIHAT TABEL DISTRIBUSI t) adalah ($t_{0,025;\ df:\ 8}$) 2,306. Karena nilai t-hitung lebih kecil daripada nilai t-tabel (1,500 < 2,306), maka disimpulkan bahwa $H_0$ tidak bisa (gagal) ditolak.
2. Menggunakan nilai-P:
   Jika analisis dilakukan dengan menggunakan program komputer nilai-P akan diperoleh yang besarnya adalah 0,17. Oleh karena nilai-P lebih besar daripada nilai $\alpha$ (0,17 > 0.05), maka disimpulkan bahwa $H_0$ tidak bisa (gagal) ditolak.

   Kesimpulan yang dapat ditarik dari hasil uji hipotesis di atas adalah bahwa rata-rata kandungan lemak hamburger adalah 4 gram.

<u>Pengujian Hipotesis untuk Proporsi Suatu Populasi</u>

<u>Contoh 1c</u>:

Sebuah pabrik penghasil kabel bawah tanah mendapat laporan dari petugas lapangannya bahwa persentasi kerusakan produknya yang besarnya 2% telah berkurang. Manajer produksi berkeinginan untuk menguji ketepatan laporan tersebut. Pengujian hipotesis, dengan demikian, dilakukan.

Hipotesis nol $H_0$: $\mu$ = 0,02

Hipotesis alternatif $H_1$: $\mu < 0,02$

Pengujian hipotesis bersisi-satu (*one-tailed*) berlaku di sini.

Teknik acak sederhana dilterapkan dalam proses ini dan 358 sampel dipilih. Dari sampel tersebut ditemukan 4 di antaranya cacat/rusak. Jadi p adalah 0,0112 (4/358).

Uji statistik yang digunakan adalah:

$$Z = \frac{X/n - p}{\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}} \qquad (13)$$

di mana:

X = jumlah sampel yang terdeteksi kerusakannya/kelainannya
n = jumlah (ukuran) sampel
*p* = proporsi populasi

X/*p* sama dengan *p*-bar.

Berdasarkan hasil penelitian dapat dihitung nilai z sebagai berikut:

$$Z = \frac{4/358 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02(1 - 0.02)}{358}}} = \frac{-0.0088}{0.0074} = -1,19$$

Keputusan statistik:

1. Menggunakan nilai z:

   Nilai z-tabel (LIHAT TABEL DISTRIBUSI z) untuk tingkat signifikansi $\alpha$ 0,10 (10%) adalah -1,28. Tandanya negatif karena berada di bawah rata-rata hitung kurva. Karena z-hitung lebih besar daripada z-tabel, maka disimpulkan bahwa hipotesis nol $H_0$ tidak bisa (gagal) ditolak.

2. Menggunakan nilai-P:

   Nilai-P untuk z = -1,28 adalah 0,1170 (0,5 – 0,3830). Karena nilai-P lebih besar daripada nilai $\alpha$ (0,1170 > 0,1000). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa hipotesis nol $H_0$ tidak bisa (gagal) ditolak.

Kesimpulan:

Dari hasil pengujian hipotesis di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa pada tingkat signifikansi 10%, peningkatan kualitas (yang ditunjukkan dengan menurunnya persentasi produk yang cacat/rusak) tidak terbukti. (Dengan perkataan lain, tingkat kerusakan produk masih berkisar pada angka 2%).

**Referensi**

Sanders, D. H. 1995. Statistics: A First Course. Fifth Edition. McGraw-Hill Inc. New York. NY. USA.

Naiman, A., R. Rosenfeld, and G. Zirkel. 1986. Understanding Statistics. Third Edition. McGraw-Hill International Editions: Mathematics and Statistics Series. New York. NY. USA.

Levin, R.I., and D. S. Rubin. 1994. Statistics for Management. Sixth Edition. Prentice Hall. Engelwood Cliffs. New Jersey. USA.